

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 下列正确的是（ ）

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x = e^{-1}$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = e^2$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e$

2. 若 $a = \{2, -1, 4\}$, $b = \{m, 3, n\}$, 且 $a // b$, 则（ ）

A. $m = -6, n = -12$

B. $m = 6, n = -12$

C. $m = 6, n = 12$

D. $m = -3, n = -6$

3. 已知 $y = \cos(x^2)$, 则 $dy =$ （ ）

A. $-2x \sin(x^2)$

B. $-2x \sin(x^2) dx$

C. $-2x \sin(x^2) + C$

D. $2x \sin(x^2) dx$

4. $I = \int \frac{dx}{3-4x}$, 则 $I = (\quad)$

A. $-\frac{1}{4}\ln|3-4x|$

B. $-\frac{1}{4}\ln|3-4x| + C$

C. $\frac{1}{4}\ln|3-4x|$

D. $\frac{1}{4}\ln|3-4x| + C$

5. 已知 $y = x^2 + 2x - 3$ 在某点处的斜率为 6, 则该点坐标为 $(\quad)$

A. $(2, 3)$

B. $(2, -3)$

C. $(2, -5)$

D. $(2, 5)$

二、填空题 (每题 3 分, 共 24 分)

1. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 则 $f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ 的定义域为_____.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\int \sin x \cos x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. $\sum_0^\infty \frac{x^n}{3^n}$ 的收敛区间为_____.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. $F(x) = \int_0^x f(x)dx$, 则 $F'(x) =$ _____.

7. 若 $f(x) = \begin{cases} e^x + 3, & x < 0 \\ a - 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

8. $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{x}$, 则 $y' =$ _____.

三、计算题 (每题 5 分, 共 35 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

2. 求不定积分 $\int e^{e^x + x} dx$.

3. 求定积分. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx$.

4. $y = e^{f(x)}$, 其中 $f(x)$ 为可导函数, 求 y'' .

5. $z = x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. 求微分方程 $(1 + x^2)dy + 2xydx = 0$ 的通解.

7. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n+1}$ 的敛散性.

四、应用题 (每题 8 分, 共 16 分)

1. 两条船从同一码头同时出发, 甲向北以 30km/h 的速度行驶, 乙向东以 40km/h 的速度行驶, 求两条船间距离变化的速度.

2. 求由 $y = x^2$, $x = 1$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

五、设 $\varphi(x) = \int_0^x \frac{3t+1}{t^2+1} dt$, 求 $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有没有最小值, 若有请求出.