

一、选择题（共 5 题，每题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$ 的定义域为 ().

A. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

B. $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$

C. $(-\infty, 3)$

D. $[3, +\infty)$

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 5x} = ()$

A. $\frac{5}{2}$

B. 2

C. $\frac{2}{5}$

D. 5

3. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 1, \\ x^2, & x \leq 1, \end{cases}$ 在 $x=1$ 处 ()

A. 连续且可导

B. 左连续但不右连续

C. 连续但不可导

D. 右连续但不左连续

4. 已知 $f'(x) = 2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{h} = (\quad)$

A. 3

B. 2

C. -3

D. -2

5. 设 $f(x) = \ln x$, $g(x) = (\ln x)^2$, 则下面结论正确的是 ()

A. $\int_1^2 f(x) dx > \int_1^2 g(x) dx$

B. $\int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 g(x) dx$

C. $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 g(x) dx$

D. 以上均不正确

二、填空题 (共 5 题, 每题 3 分, 共 15 分)

6. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{5x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $f(x) = x^2 + \log_2 x + 2^x$, 则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. $\int 2^x e^x dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 $\varphi(x) = \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt$, 则 $\varphi'(x) =$ _____.

三、计算题 (共 9 题, 每题 7 分, 共 63 分)

11. 给出 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ 所有的间断点并说明间断点的类型.

12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$.

13. 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 1, \\ x^2, & x \leq 1, \end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续且可导, a, b 应取何值?

14. 求曲线 $\begin{cases} x = (\cos t)^3, \\ y = (\sin t)^3, \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{6}$ 点处的切线方程和法线方程.

15. 求函数 $f(x) = 2 - (x + 1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

16. 计算不定积分 $\int x^2 \ln x dx$.

17. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 计算 $\int_0^\pi f(x) dx$.

18. 计算 $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1 - x^2})^2 dx$.

19. 设一长方形内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 问此长方形长、宽各为多少时其面积最大?

四、证明题 (共 1 题, 每题 7 分, 共 7 分)

20. 证明: 当 $x > 0$ 时, $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$.